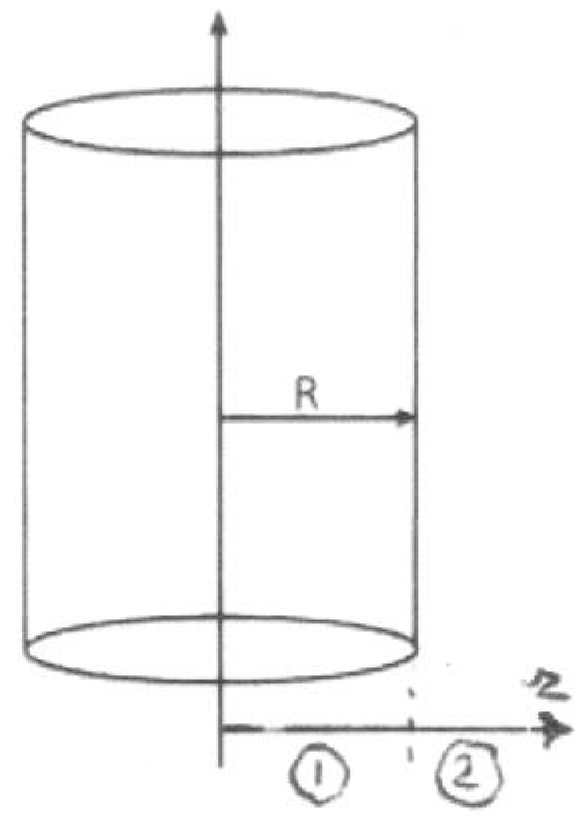
Esercizio n.1 **[10 punti]**



Una carica elettrica positiva è distribuita, con densità di carica di volume ρ uniforme, all'interno di un cilindro di lunghezza che si può assumere come infinita e di raggio ***R***.
Si chiede di: 1) Calcolare il campo elettrico ***E*** e il potenziale elettrostatico ***V*** in tutto lo spazio, assumendo ***V=0*** lungo l'asse del cilindro. 2) Fare i grafici di **E** e di ***V*** in funzione della distanza dall'asse e calcolarne i valori sulla superficie del cilindro.

Dati: **ρ = 9 nC/m³ ; *R* = 2 cm**

Il campo elettrico si può calcolare tramite il teorema di Gauss

$r \leq R$: $\phi(E_1(r)) = \int E_1(r) \cdot dS = \frac{\sum Q_i(r)}{\varepsilon_0} = \int \rho\, dV / \varepsilon_0$

per un cilindro alto h: $E_1(r) \cdot 2\pi \cancel{r} \cdot \cancel{h} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \pi r^{\cancel{2}} \cancel{h}$

da cui $E_1(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ ∴

$r > R$: Analogamente: $E_2(r) \cdot 2\cancel{\pi} r \cdot \cancel{h} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cancel{\pi} R^2 \cancel{h}$

da cui $E_2(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r}$ ∴

Il potenziale si calcola dalla $V(r) = -\int^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$r \leq R$: $V_1(r) = -\int^r \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1$

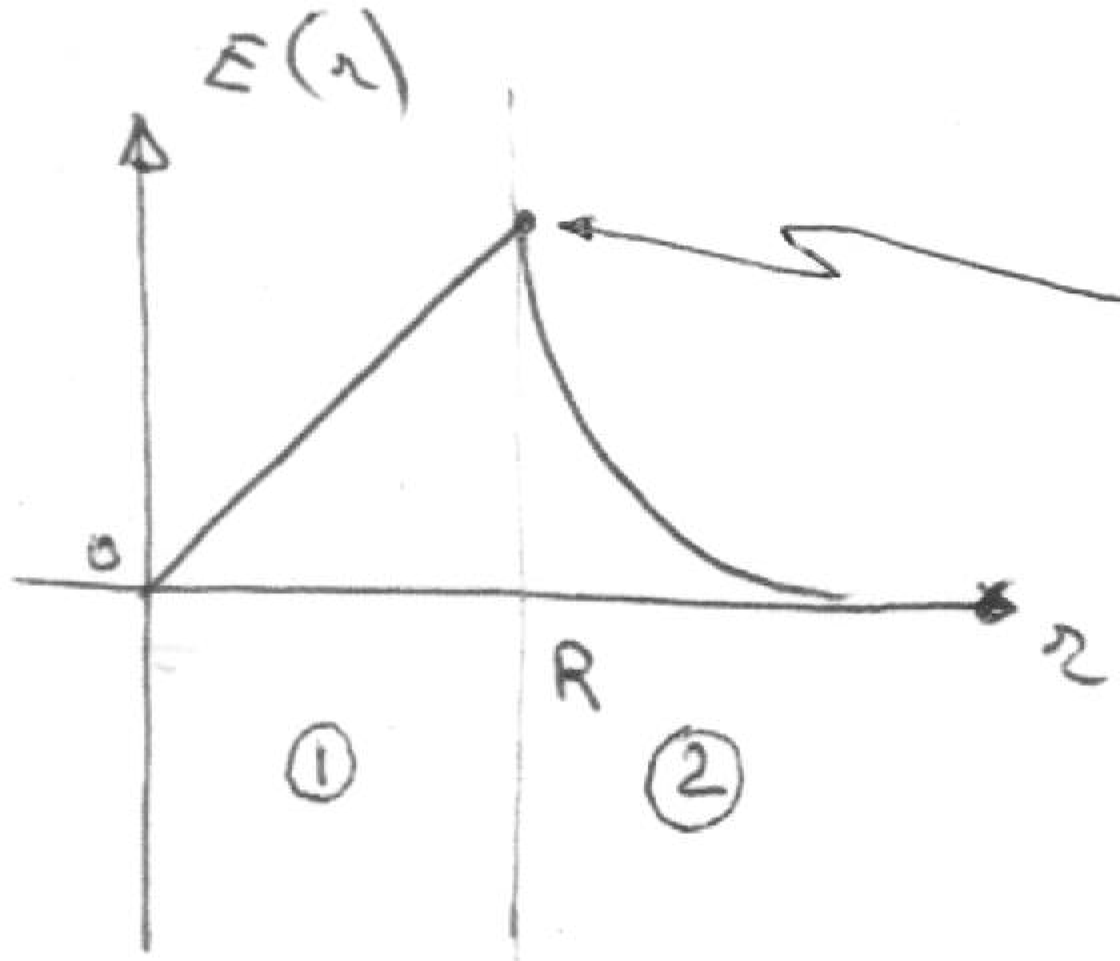
se $V_1(0) = 0 \Rightarrow V_1(0) = C_1 = 0 \Rightarrow V_1(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$ ∴

$r \geq R$: $V_2(r) = -\int^r \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + C_2$

imponendo che $V_1(R) = V_2(R)$ si ha

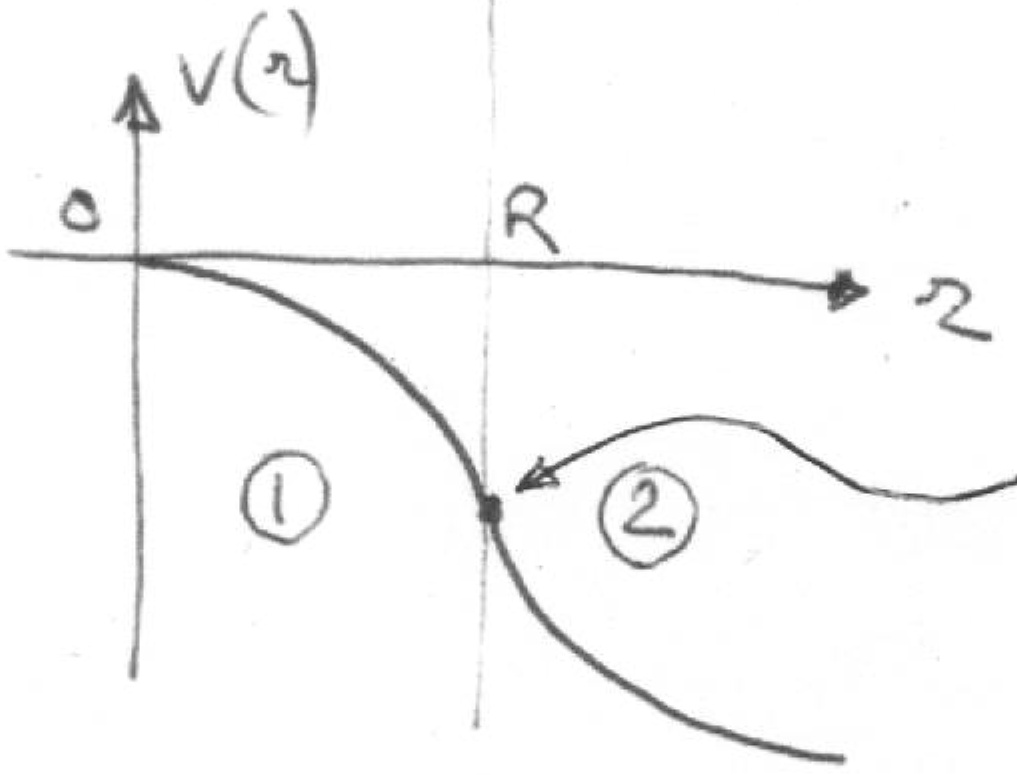
che $C_2 = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}(2 \ln R - 1)$

da cui: $V_2(r) = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 - 2\ln\dfrac{R}{r}\right) = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}\left(1 + 2\ln\dfrac{r}{R}\right)$ ∴ (1b)



$$E(R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\cancel{9}\cdot 10^{-9} \cdot \cancel{2}\times 10^{-2}}{\cancel{2}\times \cancel{9}\times 10^{-12}} \simeq 10\ V/m$$



$$V(R) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} =$$

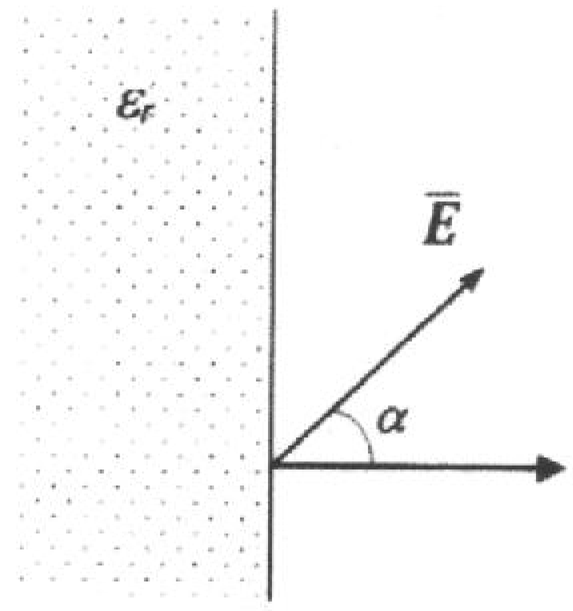
$$= \frac{\cancel{9}\cdot 10^{-9}\cdot \cancel{4}\times 10^{-4}}{\cancel{4}\times \cancel{9}\times 10^{-12}} = 0,1\ V$$

Prova scritta di Fisica 2 12.1.2018

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri una lastra semi-infinita di materiale dielettrico, omogeneo e isotropo, di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 2$. All'esterno della lastra, nel vuoto, è presente un campo elettrico $\overline{E}$ di modulo ***E=100 V/m*** che forma un angolo α di ***45°*** con la normale alla superficie della lastra (vedi figura).

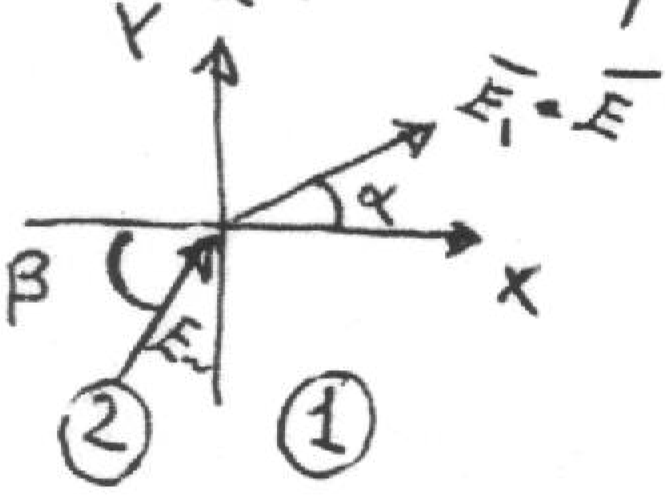
Calcolare: 1) Il campo elettrico nel dielettrico in modulo, direzione e verso. 2) La densità di carica superficiale e la densità di carica di volume di polarizzazione rispettivamente sulla superficie della lastra e all'interno della lastra.



Dati: $\varepsilon_r=2$; $E = 100$ V/m ; $\alpha = 45°$

Il problema si risolve scrivendo le relazioni di passaggio attraverso la superficie:

D_x(normale) = costante $\quad E_Y$(tangenziale) = costante



$$E_{Y_1} = E \operatorname{sen}\alpha = E_{Y_2} \therefore \Rightarrow D_{2Y} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{2Y}$$

$$D_{1x} = D\cos\alpha = D_{2x} \Rightarrow \varepsilon_0 E \cos\alpha = D_{2x}$$

$$E_{2x} = \frac{D_{2x}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 E\cos\alpha}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{E\cos\alpha}{\varepsilon_r} \therefore$$

Quindi $\overline{E}_2 = \left[\frac{E\cos\alpha}{\varepsilon_r}\right]\hat{x} + \left[E\operatorname{sen}\alpha\right]\hat{Y}$

$$|E_2| = \left[E_{x_2}^2 + E_{Y_2}^2\right]^{1/2} = \frac{E}{\varepsilon_r}\left[\cos^2\alpha + \varepsilon_r^2 \operatorname{sen}^2\alpha\right]^{1/2} \therefore$$

$$= \frac{10^2}{2}\left[\frac{1}{2} + 4\,\frac{1}{2}\right]^{1/2} = \frac{10^2}{2}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \simeq 50\sqrt{2{,}5} \simeq 50\times 1{,}6 \simeq 80 \text{ V/m} \therefore$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_{2Y}}{E_{2x}} = \frac{\cancel{E}\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{E}\cos\alpha}\varepsilon_r = \varepsilon_r = 2 \Rightarrow \beta = 63° \therefore$$

2) $$\sigma_p = \overline{P}\cdot\overline{n} = \varepsilon_0 \chi E_{2x} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{E}{\varepsilon_r}\cos\alpha = 9\cdot 10^{-12}\,\frac{1}{2}\,10^2\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

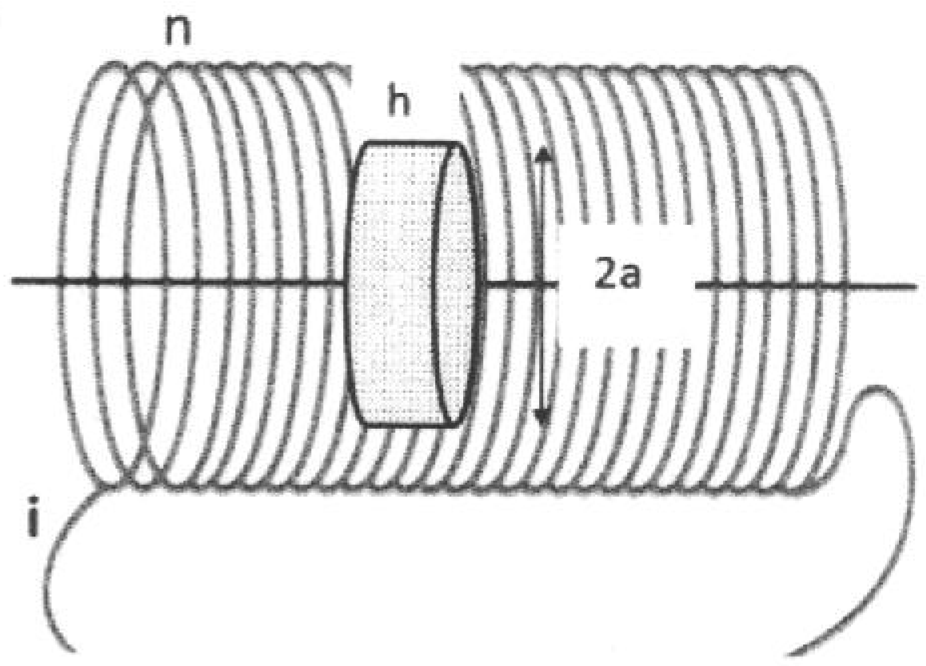
$$= 9\times 10^{-12}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\times\frac{\overset{25}{\cancel{100}}}{\cancel{2}} \cong 320\times 10^{-12}\ \text{C/m}^2$$

$$= 0{,}32 \text{ nC/m}^2 \therefore$$

$$\rho_p = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P} = 0 \therefore$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un disco di rame di conducibilità elettrica σ, raggio a e spessore h è posto coassialmente all'interno di un solenoide indefinito che ha n spire/lunghezza. Nel solenoide scorre una corrente $i(t)= i_0$ *sen* (ωt). Calcolare la potenza media dissipata nel disco per effetto Joule a causa delle correnti indotte, considerando trascurabile l'effetto di queste correnti sul campo magnetico.



Dati: $\sigma = 6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}/m$; $a = 2\ cm$; $h = 1\ cm$; $n = 10^5\ s/m$; $i_0 = 1\ A$; $\omega = 2\pi \cdot 50\ rad/s$.

Soluzione

Il campo B all'interno del solenoide è uniforme e variabile nel tempo. Quindi creerà in tutto lo spazio un campo indotto E circolare perpendicolare alla direzione di B, con centro sull'asse. Chi non se lo ricordasse può considerare che le correnti indotte nel cilindro conduttore dovranno essere tali da creare un campo B che si oppone al campo iniziale. Quindi per creare un campo lungo l'asse le correnti dovranno scorrere dentro il cilindro tangenzialmente. Ogni piccola corona di spessore dr avrà una certa resistenza dR (di area dr x h e lunghezza $2\pi r$) e verrà sottoposta alla f.e.m. che si calcola nel punto a distanza r dall'asse. Quindi per ogni corona circolare ci sarà una certa dissipazione $dW=f^2/dR$.......e la dissipazione totale sarà la somma (l'integrale) fatto su tutto il disco.

Il campo B creato dalla corrente $i(t)$ è $B(t) = \mu_0 n i_0 \operatorname{sen}\omega t$, diretto lungo l'asse del solenoide.

La f.e.m., a distanza r dall'asse, sarà $f = -\frac{d\phi}{dt} =$

$= -\mu_0 n i_0 \omega \cos\omega t\, \pi r^2$

La resistenza dR di una sottile corona di raggio r, spessore dr e altezza h è $dR = \frac{1}{\sigma}\frac{2\pi r}{h\,dr}$

La potenza dissipata in dR sarà $dP = \frac{f^2}{dR} = \frac{f^2 \sigma h\,dr}{2\pi r} =$

$$= \frac{\mu_0^2 n^2 i_0^2 \omega^2 \cancel{\pi^2} r^{\cancel{4}\,3} \sigma h\,dr}{2\cancel{\pi}\cancel{r}} \cos^2\omega t$$

$$P(t) = \int_0^a dP(t) = \frac{\sigma h \pi \mu_0^2 n^2 i_0^2 \omega^2 a^4}{8} \cos^2\omega t$$

La potenza media $\langle P(t)\rangle = \frac{P^{MAX}}{2} = \frac{\sigma h \pi \mu_0^2 n^2 i_0^2 \omega^2 a^4}{16}$

$\simeq 32\ W$

<u>Metodo alternativo</u> (senza il calcolo della R)

La f.e.m. indotta è legata al campo elettromotore indotto

$f = \oint \bar{E}(r) \cdot d\bar{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ da cui, considerando

che $\bar{E}$ è tangenziale alla linea chiusa di raggio r:

$E(r) \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \mu_0 n i_0 \omega \cos\omega t$ (i segni sono ininfluenti)

Quindi $\bar{E}(r) = \frac{\mu_0 n i_0 \omega}{2} \cos\omega t \, \hat{\tau}$

La potenza dissipata per unità di Volume è

$p(t) = \bar{E} \cdot \bar{J} = \bar{E} \cdot \sigma \bar{E} = \sigma E^2$

che, integrata su tutto il volume del disco dà:

$P(t) = \int p(t)\, dV = \int_0^a p(t) \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr =$

$= \frac{\sigma \pi h \mu_0^2 n^2 i_0^2 \omega^2 a^4}{8} \cos^2\omega t$ $\rightsquigarrow$ come sopra

$\langle P(t) \rangle = \frac{P^{MAX}}{2} \simeq 32\ W$